वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

लघुपुस्तिका

1. गणित म्हणजे 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
2. Sin 90 = 1 'का'?	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
3. त्रिकोणमिती आणि आलेख	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
4. हत्तीचा उंदीर	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00
5. साक्षर भूमिती	- प्रा. मनोहर रा. राईलकर	20.00

आगामी

* काही पत्रिका आणि काही लघुपत्रिका
* काही कृतिपत्रिका

लघुपुस्तिका क्र. 03

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई
द्वारा : श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई-412 803.
दूरध्वनी : (02167) 220766, Email : nagesh.mone@gmail.com

त्रिकोणमिती आणि आलेख

प्रा. मनोहर रामचंद्र राईलकर

वाई तालुका गणित अध्यापक, मंडळ
वाई

अक्षरजुळणी
प्रा. मनोहर राईलकर पुणे

© वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. अरुण सावंत
श्री. भगवान भुजबळ
सौ. अनुराधा जोशी

प्रकाशक
श्री. दिनकर वि. फरांदे
अध्यक्ष, वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ
वाई

प्रकाशन वर्ष
16 जानेवारी 2011

लेखक
प्रा. मनोहर राईलकर
56, मृण्मयी जेधेनगर,
बिबवेवाडी, पुणे–37
दूरध्वनी: (020) 24420566

मुद्रक
सरस्वती ऑफसेट
275 क, मंगळवार पेठ, सातारा.
दूरध्वनी : (02162) 284430

मूल्य रुपये – **20/-**

त्रिकोणमिती आणि आलेख

(मागील वेळी **sin 90 = 1 का?** ह्या पुस्तिकेत त्रिकोणमिती नेहमीच्या म्हणजे लघुकोनांच्या पलीकडे नेण्याचा आपण प्रयत्न केला. तेव्हा, पूरक कोनांचं sine गुणोत्तर सारखं असू शकतं हे आपल्याला दिसलं. निरनिराळ्या कोनांमध्ये असा काही संबंध असावा, असं त्यावरून लक्षात येतं. आता त्यांचाच आणखी शोध घेऊ या. मुलांनो, ही पुस्तिका तुम्ही स्वतः वाचून समजून घेण्याचा प्रयत्न करा. त्यामुळं तुमचा आत्मविश्वास वाढेल. मात्र, ह्या पुस्तिकेच्या आधी **sin 90 = 1 का?** ही पुस्तिका वाचा.)

शि सर, येऊ का?

प्रा वाः! येऊ का म्हणजे काय? या, या. बसा.

शि त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा आलेख कसा काढायचा ह्याबद्दल सांगेन असं तुम्ही म्हणाला होता. ते लक्षात ठेवून ही सगळी मुलं माझ्या पाठीस लागली होती. म्हणून घेऊन आलोय.

सा मागच्या वेळी तुम्ही आम्हाला त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांच्या आलेखाबद्दल सांगायचं म्हणाला होतात. तर ते सांगता?

प्रा अवश्य. पण त्याकरता आपल्याला निरनिराळ्या कोनांच्या गुणोत्तरांतल्या संबंधांचा विचार करावा लागेल.

शे म्हणजे काय सर?

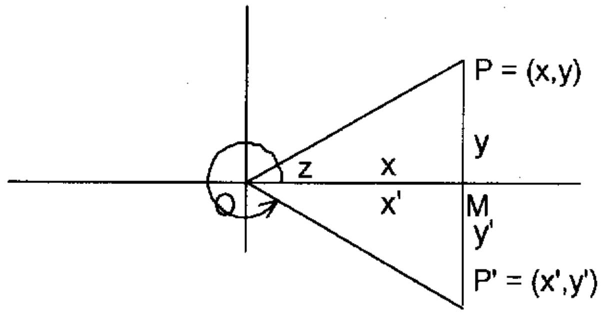
प्रा एक संबंध तर तुम्ही शाळेतच शिकला आहात. आणि एक मी मागच्या वेळी सिद्ध करून दाखवला. आठवतं?

शे A, B जर कोटिकोन असतील तर $\sin A = \cos B$ हे आम्हाला माहीतच आहे. पण दुसरा कोणता संबंध?

सा अरे शहाण्या, $\sin (180 - A) = \sin A$ हे नाही का मागच्या वेळी पाहिलं आपण. हेच ना सर?

प्रा बरोबर. तसे आणखीही कित्येक उपयुक्त संबंध आहेत. एकेक करून आपण पाहूयात. पुढच्या पानावरची आकृती पाहा. मी OP' अशी घेतली आहे की, POM, P'OM हे दोन कोन एकरूप असतील. मग आपण कोनाची जी नवी व्याख्या केली आहे, त्या व्याख्येनुसार तुम्ही काय काय सांगू शकाल? प्रश्न थोडासा अवघड

आहे हं. त्यामुळं उत्तर देता आलं नाही, तरी निराश व्हायचं कारण नाही.



रे तुम्हाला काय म्हणायचंय ते मला कळलं नाही.

प्रा सांगतो. आपण कोनाची नवी व्याख्या अशी केली आहे, की प्रथम OP, OX अक्षावर असतो आणि तो घड्याळाच्या उलट दिशेनं फिरू लागतो. किती कोन फिरल्यानंतर तो आपल्या दाखवलेल्या OP' पाशी येईल ते आपल्या दृष्टीनं महत्त्वाचं आहे. आता सांगा. 360 अंश पूर्ण होतील का?

रे नाही सर. z इतकं कमी राहील. म्हणजे 360-z असेल.

प्रा शाबास रेखा. अगदी बरोबर. तुम्हाला कळलं का?

स्वा मला नाही कळलं.

प्रा तूच मागच्या वेळी म्हणाली होतीस ना की एकास एक संबंध कसा राहील असं? 360 अंश फिरून झाले की पुन्हा पहिल्याच जागी येईल म्हणजेच OXपाशी येईल आणि पुन्हा पुढं जाईल. असंही म्हणाली होतीस. मग जर तो OP' पाशीच थांबला तर 360 अंश पूर्ण होणार नाहीत.

स्वा बरोबर. z इतकं कमी राहील. म्हणून 360-z येईल नाही का? आता कळलं.

प्रा छान. आता x,y आणि x',y' ह्या निर्देशकांतला संबंध सांगा.

मं x' = x, y' = -y

प्रा एकदम बरोबर. म्हणून 360 - z चे sine, cosine किती ते

सांगा.

अ मी सांगू? sin (360-z) = -sinz, cos (360-z) = cos z बरोबर?

प्रा बरोबर. कारण x ची किंमत बदलली नाही. पण y चं चिन्ह उलट झालं. आणखी एक. ज्या दोन कोनांच्या मापांतला फरक 360 असेल त्यांच्यांत फरक करीत नाहीत. म्हणून 360 - z = -z हेही लक्षात घ्या. त्यामुळं वरील दोन्ही समीकरणं आपण आता

sin (-z) = -sin z, cos (-z) = cos z

अशीही लिहू शकतो.

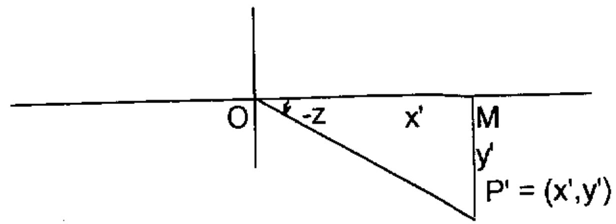
अ सर, मला एक शंका आहे. कोन ऋण कसे असतील?

प्रा तुला तसं वाटलं, त्याला कारण, तुझ्या डोक्यात अजूनही कोनाची कल्पना म्हणजे समान शिरोबिंदू असलेल्या दोन किरणांची युती हीच आहे. आता आपण कोनाच्या कल्पनेचा विस्तार केला आहे. त्यात कोनाची कल्पना किरण OX पासून किती फिरून OP पाशी आला त्याचं, म्हणजे भ्रमणाचं, माप अशी आहे. आणि घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेला आपण धन मानल्यामुळं घड्याळाची दिशा आपोआपच ऋण ठरते की नाही? आता सर्वांना कळलं?

मुलं होय, सर.

ooo

प्रा म्हणून त्याला भ्रमणकोन असंही म्हणतात. आता आणखी एक

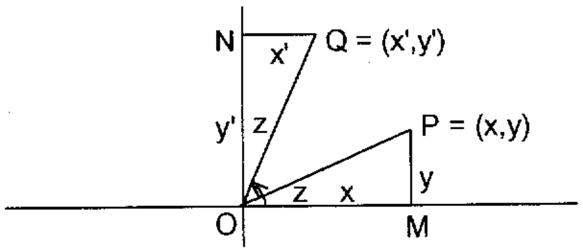


आकृती काढतो. ही वरची आकृती नीट पाहा. म्हणजे कळेल. आलं लक्षात?

मुलं होय सर. आता काय?

प्रा सांगतो. आता ही आकृती पाहा. त्रिकोण OPM, OQN एकरूप

घेतले आहेत. मग OQ चा चा भ्रमणकोन किती?



स्वा — 90-z का?

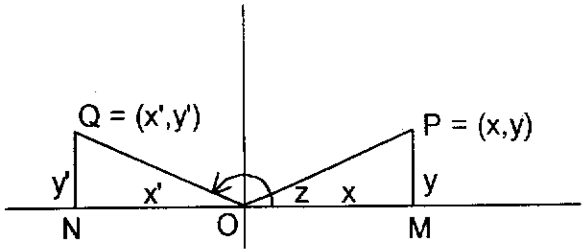
प्रा — बरोबर. तर आता x', y', x, y ह्यांच्यांतला संबंध सांगा.

मं — $x' = y$, $y' = x$ बरोबर?

प्रा — बरोबर. आता sin (90-z), cos (90-z) सांगा.

रे — $\sin (90-z) = y'/r = x/r = \cos z$.
$\cos (90-z) = x'/r = y/r = \sin z$. हे तर पूर्वीचंच झालं की.

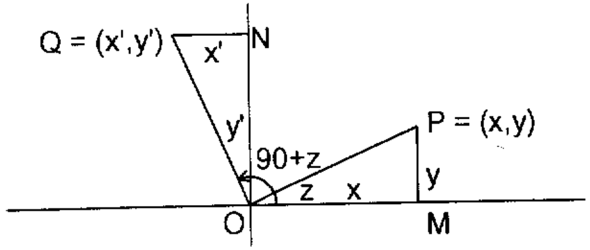
प्रा — आणि लघुकोनांकरता तसंच हवं ना? मागच्या वेळी तुम्ही $\sin (180-z) = \sin z$ हा गुणधर्म पाहिलात. आता पुढची आकृती वापरून त्याबद्दल सर्व सांगा.



मो — $x' = -x$, $y' = y$, $\cos (180-z) = x'/r = -x/r = -\cos z$ सर, बरोबर?

प्रा — बरोबर. $\sin (180-z) = \sin z$ हे आपण मागच्या वेळी पाहिलंच होतं. आता आणखी पुढं जाऊ यात. पुढची आकृती पाहा. OQ चा भ्रमण कोन किती ते सांगा आणि P, Q यांच्या निर्देशकांतले संबंध सांगा. प्रबोध तू सांग. इतका वेळ गप्प बसलायस तो.

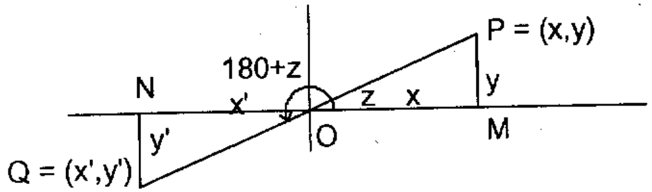
प्र — OQ चा भ्रमण कोन = 90 + z आणि $x' = -y$, $y' = x$. बरोबर?



प्रा — बरोबर. तुमच्या सर्वांच्या लक्षात आलं ना? आता ही आकृती पाहा. sin (90+z), cos (90+z) गुणोत्तरं सांगा. सुशांत तू.

सु — $\sin (90+z) = y'/r = x/r = \cos z$
$\cos (90+z) = x'/r = -y/r = -\sin z$

प्रा — शाबास! आता ही पुढची आकृती पाहा. OQ चा भ्रमण कोन, निर्देशकांतील संबंध, sine, cosine सगळं सांगा. तू शेखर.



शे — सांगतो. OQ चा भ्रमण कोन 180+z, $x' = -x$, $y' = -y$,
$\sin (180+z) = y'/r = -y/r = -\sin z$,
$\cos (180+z) = x'/r = -x/r = -\cos z$ बरोबर?

प्रा — एकदम बरोबर. आतापर्यंत आपण जमवलेल्या सर्व माहितीचं एक कोष्टक करू. sin z, cos z वरून इतर संबंधित कोनांचे sine, cosine सांगणारं हे कोष्टक तुम्ही सदैव आपल्या समोर ठेवा. ते सतत लागणार आहे. त्याचा उपयोग sin z, cos z यांचे आलेख काढण्याकरता कसा करायचा ते पुढच्या वेळी पाहू.

ooo

स्वा — आता आलेख कसा काढायचा ते सांगणार ना?

प्रा — त्यासाठी हा तक्ता सारखा समोर ठेवावा लागेल. तुम्ही आपापल्या

वह्यांत उतरून घ्या.

संबंधित कोन	sin	cos
-z	-sin z	cos z
90-z	cos z	sin z
90+z	cos z	-sin z
180-z	sin z	-cos z
180+z	-sin z	-cos z

उतरून घेतलात? तुम्ही काही विशिष्ट कोनांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं पूर्वी काढली होतीत. ती पुन्हा पाहू. कोणकोणते कोन?

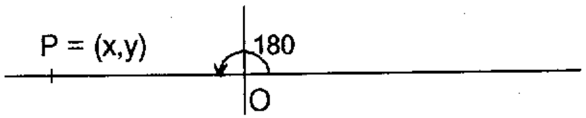
शे 30, 45, 60 हे तीन कोन.

प्रा आणि आता तुम्हाला आणखी 90, 180 ह्या कोनांची गुणोत्तरं तर माहीत झालीच आहेत.

श पण सर आपण, 180 ची गुणोत्तरं कुठं काढली होती?

प्रा नाही काढली का? मग काढा. पण, आधी आकृती काढा.

रे मी काढते.



प्रा P चे निर्देशक सांगा. आणि मग sine, cosine गुणोत्तरं सांगा.

सा x = -r, y = 0 तेव्हा, sin 180 = y/r = 0, cos 180 = x/r = -r/r = -1 बरोबर?

प्रा एकदम. 30, 45, 60 ह्या कोनांची गुणोत्तरं सांगा.

स्वा sin 30 = 1/2, cos 30 =√3/2.

प्रा वरच्यासारखं कोष्टक करून लिहा.

मं मी लिहितो सर.

प्रा छान. आता वरच्या म्हणजे आधीच्या कोष्टकाचा उपयोग करून तुम्ही आणखी पुष्कळ कोनांची sine, cosine गुणोत्तरं लिहू शकाल. मी तुम्हाला देतो, ते कोष्टक भरून आणा. त्याशिवाय, sine, cosine यांची कोष्टकंही विकत मिळतात. त्यांच्या मदतीन

संबंधित कोन	sin	cos
0	0	1
30	1/2	√3/2
45	1/√2	1/√2
60	√3/2	1/2
90		
120		
135		
150		
180		
210		
225		
240		
270		
300		
315		
360		

आणखी काही कोनांच्या, उदाहरणार्थ, 10, 20, 40, 50, 70, 80 अशा कोनांच्या गुणोत्तरांच्या किमती मिळवा. कोनांच्या किमतींवरून मागच्या कोष्टकाच्या मदतीनं 90 पेक्षा मोठ्या कोनांची गुणोत्तरंही मिळवा. इतकं सगळं करून आणलंत की आलेखाची पूर्वतयारी झाली. खाली 0-90, 90-180, 180-270, 270-360 अशा चार गटांत sine गुणोत्तरांच्या किमती दिल्या आहेत.

त्यांचं चांगलं निरीक्षण करा. आणि काय काय लक्षात येतं ते सांगा. मात्र आता आलेखाची परिभाषा हवी असल्यानं आपण z अक्षराच्या जागी x अक्षरच वापरू आणि y = sin x चा आलेख काढू

x	sin x	x	sin x	x	sin x	x	sin x
10	0.17	100	0.98	190	-0.17	280	-0.98
20	0.34	110	0.94	200	-0.34	290	-0.94
30	0.50	120	0.87	210	-0.50	300	-0.87
40	0.64	130	0.77	220	-0.64	310	-0.77
50	0.77	140	0.64	230	-0.77	320	-0.64
60	0.87	150	0.50	240	-0.87	330	-0.50
70	0.94	160	0.34	250	-0.94	340	-0.34
80	0.98	170	0.17	260	-0.98	350	-0.17
90	1.0	180	0.0	270	-0.1	360	0.0

सा पहिल्या स्तंभातल्याच संख्या दुस-यात आहेत. पण त्या उलट क्रमानं आल्या आहेत. पण सर त्याचं कारण sin (180 - x) = sin x हेच आहे, नाही का? आणि ह्या सर्व संख्या ऋण चिन्हासह तिस-या आणि चौथ्या स्तंभांत दिसताहेत.

प्रा शाबास साधना! त्याचं कारणही तुझ्या लक्षात आलं, हे चांगलं आहे. आणि त्या उलट क्रमानं का येत असतील? कुणी सांगू शकेल.

मं सरळ आहे. जसजसा x वाढेल तसतशी 180-x ची किंमत कमीच होणार.

प्रा तिस-या आणि चौथ्या स्तंभाबद्दल काय कारण सांगता येईल?

प्र तेही सरळ आहे. कारण sin (180 + x) = -sin x हे आहे.

प्रा बरं 360 च्या पुढं गेल्यावर काय होईल?

सु पुन्हा ह्याच किमती ह्याच क्रमानं येणार.

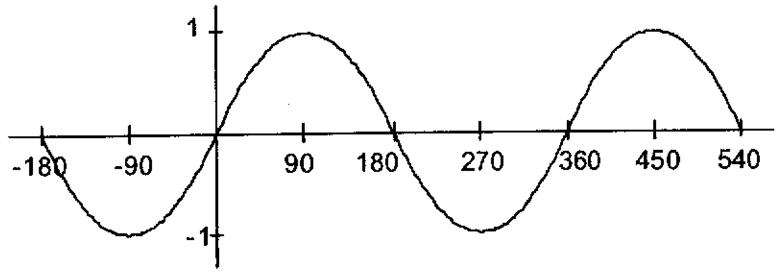
प्रा त्याचं कारण?

सु x आणि 360+x ह्यांत आपण फरक करीत नाही, म्हणून.

प्रा आपण अजून x च्या ऋण किमती घेतल्या नाहीत. त्याचं काय?

श ते सगळं sin (-x) = -sin x ह्या सूत्रावरून येईल.

प्रा आता ह्याचा आलेख काढायचा प्रयत्न करा. चांगला आलेख इथं दिला आहे. ह्या आलेखाला तरंगवक्र (wave curve) म्हणतात. सध्या इतकंच लक्षात ठेवा. विज्ञानात तुम्हाला ह्या वक्राची अधिक माहिती मिळेल. हा sine चा आलेख आहे. आलेख प्रत्येक 360



नंतर वारंवार तसाच येत असल्याचं दिसतं. त्यामुळं ह्या आलेखाला आवर्ती आलेख म्हणतात. आणि sine ला आवर्ती फल म्हणतात. हा आलेख दोन्ही बाजूंना हवा तेवढा वाढवता येईल. कोणत्याही कोनात 360 मिळवले तरी त्यांची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं तीच राहतात, हे आपण पाहिलं आहे. एक प्रश्न विचारतो. sin x च्या कोष्टकात आणखी एक स्तंभ वाढवायचा तर काय होईल?

स्वा सरळ आहे. पहिलाच स्तंभ पुन्हा लिहावा लागेल.

प्रा बरोबर.

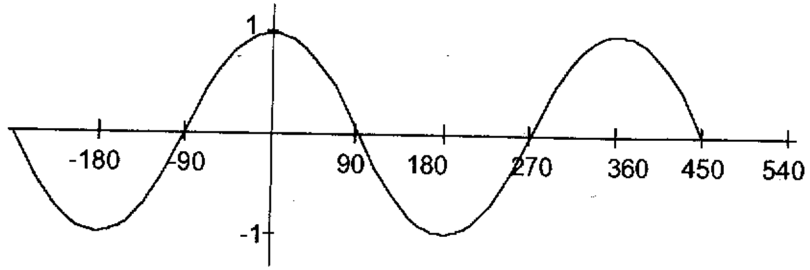
स्वा sin x चा आलेख काढला, तसा cos x चा आलेख येईल?

प्रा पुढं दिलाय. पण, त्याच्या किमतींचं कोष्टक करू

x	cos x	x	cos x	x	cos x	x	cos x
10	0.98	100	-0.17	190	-0.98	280	0.17
20	0.94	110	-0.34	200	-0.94	290	0.34
30	0.87	120	-0.50	210	-0.87	300	0.50
40	0.77	130	-0.64	220	-0.77	310	0.64
50	0.64	140	-0.77	230	-0.64	320	0.77
60	0.50	150	-0.87	240	-0.87	330	0.87
70	0.34	160	-0.94	250	-0.34	340	0.94
80	0.17	170	-0.98	260	-0.17	350	0.98
90	0.0	180	-1.0	270	0.0	360	1.0

रे सर, ह्या दोन्ही कोष्टकांत काही तरी सारखेपणा दिसतोय.

प्रा बरोबर. दोन्ही कोष्टकांची तुलना करा.एकदम लक्षात येणार नाही. म्हणून सांगतो. sine च्या कोष्टकातला पहिला स्तंभ वगळला आणि नंतर तोच पुढं लिहिला तर आपल्याला cosine चं कोष्टक मिळतं. आणि cosine लाही आवर्ती फलच म्हणतात.



सा खरंच की सर. पण सर, असं का होतं?

प्रा साधं कारण. $\sin (90 + z) = \cos z$ हे आपण पाहिलं नाही का? त्यामुळं ह्या दोघांत फरक नाही. आरंभ वेगळा आहे, इतकंच दोन्हींचे वक्रही तसेच दिसतात की नाही? sine चा आलेख -90 अंशांपर्यंत मागं ओढला की cosine चा आलेख होतो.

मं हे आलेख लाटांसारखे म्हणजेच तरंगासारखे दिसतात, म्हणूनच त्यांना तरंगवक्र म्हणतात का?

प्रा अगदी बरोबर. खरं तर तुमचामाझा आवाज, विविध प्रकारच्या वाद्यांचे आवाज म्हणजेही एक प्रकारचे तरंगच आहेत. मात्र ते वक्र इतके साधेसोपे नसतात. ते निरनिराळ्या प्रकारच्या विविध तरंगांच्या मिश्रणातून बनतात. त्यांची अधिक माहिती तुम्हाला विज्ञानात, आवाजाच्या अभ्यासाच्या वेळी मिळेल.

सु म्हणजे ह्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा व्यवहारात खूपच उपयोग आहे, असं म्हणायला हवं.

रे ह्या म्हणजे विस्तार केलेल्या ना सर?

प्रा होय. पण, तुम्ही जी त्रिकोणमिती शिकलात ती काटकोन त्रिकोणाच्या माध्यमातून. आणि तिचाही उपयोग आहेच.

शे उंची, खोली वगैरे काढण्याकरता ना?

प्रा होय.

शि आता पुढं काय सर?

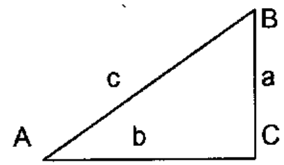
प्रा आता उद्या पाहू. थोडी आणखी त्रिकोणमिती शिकू.

ooo

प्रा आपल्याला दोन कोनांचीsine, cosine गुणोत्तरं माहीत असतील तर त्यावरून त्या कोनांच्या बेरजेची आणि वजाबाकीची sine, cosine गुणोत्तरं काढता येतील का, असा एक प्रश्न आहे.

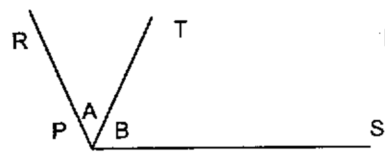
श कशी काढता येतात? आम्हाला समजेल?

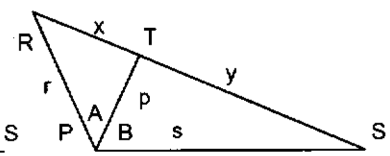
प्रा नक्कीच समजेल. काही पूर्वतयारी करू. आणि पूर्वतयारीकरता जुन्याच त्रिकोणमितीचा अवलंब करू. म्हणजे समजायला सोपं जाईल. तुम्हाला A ची sine, cosine गुणोत्तरं माहीत आहेत. ही आकृती पाहा. आणि सांगा पाहू.



शे $\sin A = a/c$, $\cos A = b/c$. पुढं काय करायचं?

प्रा यावरून आपण $a = c.\sin A$, आणि $b = c.\cos A$ असं लिहून ठेवू. आता, हे काही मापांचे कोन घेऊ. ते लघू आहेत, असंच समजू. आता पुढची आकृती पाहा. त्यातल्या अक्षरांचा अर्थ न सांगताही कळेल. पुढं T बिंदूतून PT ला लंब रेषा काढू. आणि





नावांच्या अक्षरांची संख्या वाढवण्याऐवजी ती दुसऱ्या आकृतीप्रमाणं मानू. फक्त रेषाखंडांना नावं देण्याकरता जी नवीन लागतील तितकीच नवी नावं घेतली आहेत. आता,

2.त्रिकोण PRS चं क्षेत्रफळ = 2.r.s.sin (A+B)

= 2.त्रिकोण PRT चं क्षेत्रफळ + 2.त्रिकोण PST चं क्षेत्रफळ

सा सर तुम्ही 2 कशाकरता घेतलेत?

शि मी सांगतो. सरांची ती एक युक्ती आहे. असं केल्यामुळं भागाकार टळतात. आणि लेखन सोपं होतं. बरोबर ना सर?

प्रा (स्मित करीत) म्हणजे आमच्या सरांची ही युक्ती तुमच्या सरांना पटली. बरं उजव्या बाजूचे दोन्ही त्रिकोण काटकोन त्रिकोण आहेत की नाही? ह्या दोन त्रिकोणांची क्षेत्रफळं सांगा पाहू.

मं मी सांगतो. दुप्पट करूनच सांगू ना? (प्रा. मान डोलवतात.)

2.त्रिकोण PRT = x.p आणि 2.त्रिकोण PST = y.p

बरोबर?

प्रा A, B चे sine, cosine वापरून p, x, y यांच्या किमती काढा. आणि p ची किंमत दोन्ही त्रिकोणांवरून काढा. कारण कळेलच.

मो x = r.sinA, p = r.cosA, p = s.cosB, y = s.sinB

प्रा p च्या किमती तू दोन्ही प्रकारांनी मांडल्यास ते बरं केलंस.

प्रा ह्या किमती वरच्या समीकरणात घालून काय होतं ते पाहा.

अ 2.r.s.sin(A+B) = x.p + y.p

= r.sinA.r.cosA + s.sinB.s.cosB = r^2siAcosA + s^2sinBcosB पण, आता पुढं काय करायचं ते कळत नाही.

प्रा त्याचं कारण तूp च्या किमती मिळाल्या तशा घातल्यास. अदलाबदल करू. म्हणजे दोन्ही बाजूंना r.s येऊन त्याचा लोप होईल.

2.r.s.sin(A+B) = r.sinA.s.cosB + s.sinB.r.cosA.

अ खरंच की. आणि आता rs चा लोप करून

sin(A+B) = sinA.cosB + cosA.sinB

प्रा मिळालं ना सूत्र? आता हे तुम्ही आपापल्या वहीत टिपून ठेवा. पुढच्या त्रिकोणमितीकरता हे पायाभूत सूत्र आहे.

सु म्हणजे काय सर?

प्रा आता तुम्ही B च्या जागी -B घालून पाहा. म्हणजे आणखी एक सूत्र मिळेल. अशी त्या सूत्रापासून आणखीही काही मिळतील.

मं पण त्याकरता पूर्वीची sin (-z) = -sin z आणि cos (-z) = cos z ही सूत्रं लागतील ना?

प्रा बरोबर. मग करा तर खरं.

मं sin(A-B) = sinA.cos(-B) + cosA.sin(-B)

= sinA.cosB - cosA.sinB. बरोबर?

प्रा एकदम बरोबर.

स्वा सर अशीच cos(A+B), cos(A-B) यांची सूत्रंही मिळवता येतील का?

प्रा अशा मार्गानं नाही. पण दुसरा जो मार्ग आहे तो अगदी सोपा आहे. सांगू? तुम्हाला sin(90+z) = cosz माहीत आहे. ह्या सूत्रात z च्या जागी A+B घाला. पण, बाजू उलट करून घ्या.

मो म्हणजे cos(A+B) = sin(90+A+B) असं ना?

प्रा होय. आता कंसातली बेरीज (90+A)+B अशी लिहा. आणि पहिलं, म्हणजेच पायाभूत सूत्र वापरा.

शे मी करतो.

cos(A+B) = sin(90+A+B)

= sin(90+A)cosB + cos(90+A)sinB

= cosAcosB - sinAsinB अरे वा! मग cos(A-B) सुद्धा करता येईल का?

श ते काय ह्याच सूत्रात B च्या जागी -B घालून लवकर येईल.

प्रा करा ना. तू कर साधना.

सा cos(A-B) = cosAcos(-B) - sinAsin(-B)

= cosAcosB + sinAsinB

प्रा झाली की चार सूत्रं तयार झाली. म्हणजे फक्त पहिलं सूत्र तयार करायला वेळ लागला. पुढची लागलीच आली की नाही?

शि संपलं का सगळं?

प्रा छे हो! किती तरी आहे. पण एकदम सगळं ह्या मुलांना कसं झेपेल? हवं असेल तर आणखी थोडंसं पाहू उद्या.

ooo

शि आता काय?

प्रा	$\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ ह्या सूत्रांत $B=A$ लिहू. मग काय मिळेल? करून पाहता का?

रे	$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$, यात $B=A$ लिहून $\sin 2A = \sin A\cos A + \cos A\sin A = 2\sin A\cos A$

प्रा	शाबास. आता दुसऱ्यात $B=A$ लिहून पाहा. तू प्रबोध.

प्र	$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ यात $B=A$ लिहून $\cos 2A = \cos A\cos A - \sin A\sin A$

प्रा	$\sin A$ चा वर्ग $\sin^2 A$ असा आणि $\cos A$ चा वर्ग $\cos^2 A$ असा लिहितात, ते तुम्हाला माहीत आहे ना? मग सूत्र कसं होईल?

सु	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

प्रा	हे आणखी एक सूत्र झालं. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ हे प्राथमिक नित्यसमीकरण वापरून हेच नित्यसमीकरण आणखी दोन उपयुक्त प्रकारांनी लिहिलं जातं. पाहा,

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$

$= 1 - 2\sin^2 A$, फक्त $\sin^2 A$ रूपात. आणि

$\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1$ फक्त $\cos^2 A$ च्या रूपात. ह्यांचे उपयोग तुम्हाला नंतर कळतील.

सा	सर आपल्याला फक्त 30, 45, 60 ह्यांचीच गुणोत्तरं माहीत आहेत. आणखी कोणत्या कोनांची काढता येत नाहीत का?

प्रा	येतात तर काय झालं. ह्या सूत्रांचा उपयोग करून तुम्ही 15ची गुणोत्तरंही काढू शकाल. उदा. $15 = 45 - 30$ असं लिहा आणि सूत्रांचा उपयोग करा.

मो	मी करू का? $\sin 15 = \sin(45-30)$

$= \sin 45.\cos 30 - \cos 45.\sin 30$

$= (1/\sqrt{2}).(\sqrt{3}/2) - (1/\sqrt{2}).(1/2)$

$= (\sqrt{3} - 1)/(2\sqrt{2})$ असं लिहिता येईल. बरोबर?

प्रा	हे म्हणजे $\cos 75$ सुद्धा आहे. आणि आता $\cos 15$ काढा.

मं	$\cos 15 = \cos(45-30) = \cos 45\cos 30 + \sin 45\sin 30$

$= (1/\sqrt{2}).(\sqrt{3}/2) + (1/\sqrt{2}).(1/2)$

$= (\sqrt{3} + 1)/(2\sqrt{2})$

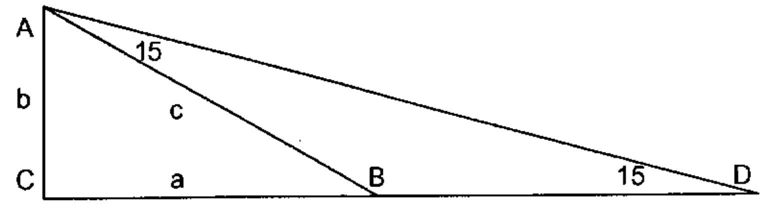
प्रा	बरोबर. आणि हीच किंमत $\sin 75$ चीही येते, हे तर तुम्हाला माहीतच आहे.

शि	सर हे भूमितीनंही करता येईल ना?

प्रा	न यायला काय झालं. त्याच्याकरता $(\sqrt{3} + 1)^2$ ह्याचा विस्तार आपल्याला लागेल. म्हणून तो करून ठेवू या. अदिती तू कर.

अ	$3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})$

प्रा	हे टिपून ठेवू. आता ही आकृती पाहा. त्रि ABC चे कोन 30-60-90 घेतले आहेत. आकडेमोड टाळू. त्यासाठी, बाजू $b = 1$ मानू.



मग $c = 2$ आणि $a = \sqrt{3}$ मिळेल. C बाजू D पर्यंत अशी वाढवू की $BD = 2$ येईल. आता $AB = BD = 2$ असल्यामुळं कोन BAD, BDA समान असतील आणि त्यांची बेरीज ABC कोनाइतकी म्हणजे 30 येईल. म्हणून त्या दोन्ही कोनांची मापं 15 असतील. तेच आकृतीत दाखवलं आहे. त्यामुळं ज्याचा एक लघुकोन 15 आहे असा ADC हा काटकोन त्रिकोण आपल्या मिळाला. ह्याचा दुसरा लघुकोन किती असेल?

मं	अर्थात, 75.

स्वा	कळलं मला. जर आपण ह्या कोनाच्या बाजू काढल्या तर आपल्याला ह्या कोनांची गुणोत्तरं लगेच मिळतील.

प्रा	मग काढा तर कुणी तरी. नाही तर सगळ्यांनी आपापल्या वहीत करून पाहा ना. आणि नंतर कुणी तरी फळ्यावर करा. रेखा तू.

रे	$CD = CB + BD = \sqrt{3} + 2$.

$AD^2 = CD^2 + AC^2$

$= (\sqrt{3}+2)^2 + 1 = 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 1 = 8 + 4\sqrt{3}$

$= 4(2+\sqrt{3})$. आता पुढं काय करायचं तेच कळत नाही.

प्रा $4(2+\sqrt{3})$ हे $2(4+2\sqrt{3})$ असं लिहा. मागच्या सूत्रानं कंसातल्या राशीचा वर्गमूळ मिळेल. आधी केलंच आहे. AD = ?

सु $AD = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$ वाः छान!

प्रा आकडेमोड करा आणि 15, 75 ह्या कोनांची गुणोत्तरं सांगा.

स्वा $\sin 15 = AC/AD = 1/[\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)]$

प्रा आपल्या पूर्वीच्या उत्तरांशी का जुळत नाहीत? कुणी सांगेल?

शि सर, त्यांच्या नाही लक्षात यायचं. अंश-छेदांना $\sqrt{3} - 1$ नं गुणा.

रे समजलं. परिमेयीकरण ना?

$(\sqrt{3} - 1)/[\sqrt{2}(3 - 1)] = (\sqrt{3} - 1)/2\sqrt{2}$ आता बरोबर आलं.

मं मी sin 75 काढतो. ह्याची किंमत = CD/AD

$= (\sqrt{3} + 2)/[\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)]$, पुन्हा अंश-छेदांना $\sqrt{3} - 1$ नं गुणून...

प्रा थांब. तसं करण्याऐवजी मी तुला निराळी युक्ती सांगतो. मगाशी आपण पाहिलं की $(\sqrt{3} + 1)^2 = 2(2 + \sqrt{3})$. म्हणून अंश-छेदांना 2 नं गुणा. मग $(\sqrt{3} + 1)$ हा एक अवयव लोप पावेल. आणि आता काय येतं उत्तर?

रे सर बरोबर. $(\sqrt{3} + 1)/(2\sqrt{2})$, मघाचंच उत्तर आलं.

सु पण, सर ही आकडेमोडीची रीत फारच किचकट आहे. आधीचीच रीत चांगली आहे.

प्रा पण त्याकरता केवढी तरी पूर्वतयारी केली होती. तेव्हा कुठं उत्तर सोपं वाटलं. उलट, आकडेमोडीच्या रीतीकरता आपल्याला आपली आधीची, म्हणजे काटकोनाची त्रिकोणमिती पुरली. एक फायदा तर दुसरा तोटा. खरं तर म्हणूनच निरनिराळ्या रीती शिकायच्या. एका प्रसंगात एखादी रीत सोपी वाटेल, दुस-या प्रसंगात दुसरी सोपी वाटेल. म्हणजे कधी हत्ती सोयीचा ठरेल तर कधी उंदीर करावा लागेल. मात्र, आता हे सारं पुन्हा पुन्हा वाचा. म्हणजे लक्षात राहील. आणि सर्व सूत्रं लिहून ठेवा.

ooo

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

पुस्तिका

1.	मिश्र संख्या	– प्रा. म. रा. राईलकर	15.00
2.	विभागणी व तिची भावंडे	– डॉ. व. ग. टिकेकर	15.00
3.	गणिती युक्तिवाद	– प्रा. य. ना. वालावलकर	15.00
4.	गणित मौज	– श्री. ना. शं. मोने	15.00
5.	कोनाचं त्रिभाजन	– प्रा. म. रा. राईलकर	15.00
6.	संख्यानगरीत भटकंती	– श्री. पी. के. श्रीनिवासन् अनुवाद : डॉ. मधुकर देशपांडे	20.00
7.	गणितातील कयास, खरे व चुकलेले	– डॉ. व. ग. टिकेकर	20.00
8.	क्षेत्रफळ आणि घनफळ, काही तात्त्विक पैलू	– डॉ. रवींद्र बापट	20.00
9.	ऋण संख्या	– प्रा. म. रा. राईलकर श्री. ना. शं. मोने	20.00
10.	भूमितीय रचना	– श्री. ना. शं. मोने	20.00
11.	सममिती आणि इतर	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
12.	दिनदर्शिकेमधली जादू	– श्री. पी. के. श्रीनिवासन अनुवाद : डॉ. मधुकर देशपांडे	20.00
13.	एकाच माळेचे मणी	– श्री. ना. शं. मोने	20.00
14.	दोन मुलाखती	– संकलन : श्री. ना. शं. मोने	20.00
15.	गणितींचे किस्से	– डॉ. व. ग. टिकेकर	20.00
16.	निर्देशक भूमिती	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
17.	त्रिकोण नगरीसह भूमितीची विविधता	– प्रा. डॉ. सदाशिव देव	50.00
18.	संख्यामालिका	– श्री. दिलीप गोटखिंडीकर	40.00
19.	विधान एकः सिद्धता अनेक भाग (1)	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
20.	विधान एकः सिद्धता अनेक भाग (2)	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
21.	कापा आणि जोडा	– प्रा. म. रा. राईलकर	30.00
22.	अपूर्णांक	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
23.	दशांश अपूर्णांक	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
24.	समीकरण	– प्रा. म. रा. राईलकर	20.00
25.	पायथागोरसची त्रिकुटे	– प्रा. डॉ. सदाशिव देव	50.00
26.	गणित फुले	– डॉ. व. ग. टिकेकर	50.00
27.	अपूर्णांकः आजीकडून शिका (सी.डी.)	– प्रा. म. रा. राईलकर	40.00
28.	कापा आणि जोडा (सी.डी.)	– प्रा. म. रा. राईलकर	50.00

सर्व पुस्तकांसाठी श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई
दूरध्वनी: (02167) 220766. मोबाईल: 9226283203. यांच्याशी संपर्क साधावा.